

Modelltheorie in der KRIPKE-Semantik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Horst Osswald

München, im Juli 1968



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Modelltheorie in der KRIPKE-Semantik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Horst Osswald

München, im Juli 1968

Inhaltsangabe

Einleitung	3
----------------------	---

Kapitel 1

Semantische Charakterisierung der intuitionistischen PIF-Logik

§ 1	Syntax der intuitionistischen PIF-Logik	4
§ 2	Semantik der intuitionistischen PIF-Logik	6
§ 3	Die semantische Vollständigkeit des Kalküls der intuitionistischen PIF-Logik	8

Kapitel 2

Modelltheorie der intuitionistischen PIF-Logik

§ 1	Klassische Erfüllbarkeit und intuitionistische Erfüllbarkeit	11
§ 2	Die Begriffe des k -Homomorphismus, der k -Unterstruktur und des k -Ultraprodukts	15
§ 3	Übergang von den semantischen zu algebraischen Begriffen	18



Berichterstatter:

Prof. Dr. K. SCHÜTTE, Prof. Dr. H. GERIQUE

MODELLTHEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN IN DER KRIPKE-SEMANTIK *

Von Horst Osswald, München

Einleitung: Der klassischen Modelltheorie kann man eine nichtklassische, eine intuitionistische Modelltheorie gegenüberstellen. Diese untersucht in analoger Weise ganz allgemein die Beziehungen zwischen Formeln und den Begriffen, die die intuitionistische Prädikatenlogik semantisch charakterisieren. S. A. Kripke hat eine solche Charakterisierung gegeben. In dem Folgenden soll innerhalb dieser Semantik mit dem Aufbau einer Modelltheorie begonnen werden.

Dazu wird zunächst einmal die Semantik von Kripke so verallgemeinert, daß sie die intuitionistische PIF-Logik (Prädikatenlogik mit Funktionszeichen und Identität) charakterisiert. In Kapitel 1 wird der starke Vollständigkeitssatz bewiesen.

Der neu entstandene Begriff des i -PIF-Modells ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden klassischen Begriffs des PIF-Modells. Die Klasse der i -PIF-Modelle umfaßt die Klasse der PIF-Modelle. Einige Zusammenhänge zwischen der klassischen Erfüllungsrelation und der intuitionistischen findet man im § 1 von Kapitel 2.

Im § 2 von Kapitel 2 werden die drei wichtigen modelltheoretischen Begriffe des Homomorphismus, der Unterstruktur und des Ultraprodukts auf die i -PIF-Modelle verallgemeinert. Es entstehen die Begriffe des k -Homomorphismus, der k -Unterstruktur und des k -Ultraprodukts. Dann wird untersucht, welche Formeln und unter welchen Bedingungen sie bei diesen neuen semantischen Operationen gültig bleiben.

Im § 3 gehen wir von den semantischen Begriffen über zu rein algebraischen Begriffen, für die wir die Ergebnisse von Kapitel 2 zusammenfassen.

Herrn Prof. Kurt Schütte danke ich für seine bereitwillige Unterstützung und seine wertvollen Ratschläge herzlich.

Als metasprachliche Abkürzungen verwenden wir oft:

F.a. (für alle), E.g. (es gibt), $\Rightarrow$ (impliziert), $\Leftrightarrow$ (genau dann, wenn) und erf (erfüllt).

Ist $\{X_i : i \in I\}$ eine Menge von Mengen, so bezeichnen wir mit $\bigcap (X_i : i \in I)$ bzw. $\bigcup (X_i : i \in I)$ den Durchschnitt bzw. die Vereinigung der Elemente von $\{X_i : i \in I\}$. Die endlichen Kardinalzahlen sollen mit den endlichen Ordinalzahlen identifiziert werden, und jede Ordinalzahl identifizieren wir mit der Menge aller

* Eingegangen am 25. 7. 68.

kleineren Ordinalzahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit ω , es ist $0 \in \omega$. Ist M eine Menge, so sei $|M|$ die Mächtigkeit dieser Menge.

Ist r eine 2-stellige Relation auf der Menge A und ist $B \subseteq A$, so ist $r \upharpoonright B \times B$ die Menge $\{(a, b) : (a, b) \in r \text{ und } a, b \in B\}$. Eine 0-stellige Relation ist einer der beiden Wahrheitswerte w oder f .

Die Menge aller Funktionen von A in B bezeichnen wir mit B^A . Eine n -stellige Funktion auf A ist ein Element aus $A^{(A^n)}$. Eine 0-stellige Funktion auf A ist ein festes Element von A . Ist f eine Funktion von A in B und ist $A' \subseteq A$, so ist $f \upharpoonright A' \in B^{A'}$ mit $f \upharpoonright A'(a) = f(a)$ für alle $a \in A'$.

Das Tripel $\mathfrak{A} = \langle A, (f_i)_{i \in I}, (r_j)_{j \in J} \rangle$ mit Indexmengen I und J heißt eine *Struktur* vom Typ $\tau = ((s_i)_{i \in I}, (\sigma_j)_{j \in J})$, wenn gilt: $A \neq \emptyset$, $f_i \in A^{(A^{s_i})}$ für alle $i \in I$ mit $s_i \in \omega$ und $r_j \subseteq A^{\sigma_j}$ für alle $j \in J$ mit $\sigma_j \in \omega$. A nennen wir die Trägermenge von $\mathfrak{A}$, die wir mit $|\mathfrak{A}|$ bezeichnen.

Sind $\mathfrak{A} = \langle A, (f_i)_{i \in I}, (r_j)_{j \in J} \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, (g_i)_{i \in I}, (p_j)_{j \in J} \rangle$ Strukturen vom Typ τ , so heißt die Funktion $\varphi : A \rightarrow B$ ein *Homomorphismus* von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, wir schreiben dann $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, wenn gilt: Es ist $\varphi(f_i(a_0, \dots, a_{s_i-1})) = g_i(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_{s_i-1}))$ für alle $a_0, \dots, a_{s_i-1} \in A$. Und ist $(a_0, \dots, a_{\sigma_j-1}) \in r_j$, so ist $(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_{\sigma_j-1})) \in p_j$ für alle $a_0, \dots, a_{\sigma_j-1} \in A$.

Kapitel 1

Semantische Charakterisierung der intuitionistischen PIF-Logik

§ 1. Syntax der intuitionistischen PIF-Logik

Definition 1: Grundzeichen der Sprache sind:

1. Individuenvariablen, die wir mit $x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, z, z_1, z_2, \dots$ bezeichnen,
2. die Elemente einer I -Folge $(F_i)_{i \in I}$ von Funktionszeichen, wobei F_i von endlicher Stellenzahl s_i ist für alle $i \in I$,
3. die Elemente einer J -Folge $(R_j)_{j \in J}$ von Relationszeichen, wobei R_j von endlicher Stellenzahl σ_j ist für alle $j \in J$,
4. die Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$,
5. das Gleichheitszeichen $\equiv$,
6. die Quantoren $\exists, \forall$ und
7. als Hilfszeichen die runden Klammern $(,)$, Punkt und Komma.

Wie in der klassischen Logik werden *Terme* und *Formeln* definiert.

Mit $\text{Ind}\Theta$ bzw. $\text{Ind}t$ bezeichnen wir die Menge der Individuenvariablen, die in Θ frei vorkommen bzw. in t vorkommen. Ist Σ eine Formelmenge, so ist $\text{Ind}\Sigma = \bigcup (\text{Ind}\Theta : \Theta \in \Sigma)$.

Wir führen folgende *Klammerersparungsregeln* ein:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\wedge$ stärker als $\vee$, $\vee$ stärker als $\rightarrow$.

Für $(\Theta_0 \rightarrow (\Theta_1 \rightarrow (\dots (\Theta_{n-1} \rightarrow \Theta) \dots)))$ schreiben wir kürzer $\Theta_0 \rightarrow \dots \rightarrow \Theta_{n-1} \rightarrow \Theta$. Ist $\Delta = (\Theta_i)_{i \in n}$ eine n -Folge von Formeln, so schreiben wir $\Delta \rightarrow \Theta$ für $\Theta_0 \rightarrow \dots \rightarrow \Theta_{n-1} \rightarrow \Theta$. Ist $n = 0$, so ist $\Delta \rightarrow \Theta = \Theta$.

Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die *Menge aller Formeln*.

Die *freie Einsetzung* sei in der üblichen Weise definiert. Entsteht die Formel H aus Θ durch freie Einsetzung des Terms t für y , so schreiben wir $FE\Theta y t H$. Für H schreiben wir auch Θ_y^t . Ist $y \notin \text{Ind } \Theta$, so ist $\Theta_y^t = \Theta$.

Die gebundene Umbenennung sei ebenfalls in der üblichen Weise definiert. Entsteht die Formel H aus der Formel Θ durch gebundene Umbenennung, so schreiben wir $GU\Theta H$. Gilt $GU\Theta H$, so gilt auch $GUH\Theta$.

Definition 2: Axiome der intuitionistischen PIF-Logik sind:

- A1: $\forall x (x \equiv x)$
- A2: $\forall x \forall y (x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$
- A3: $\forall x \forall y \forall z (x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$
- A4: $\forall x_0 \dots \forall x_{s_i-1} \forall y_0 \dots \forall y_{s_i-1}$
 $(x_0 \equiv y_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{s_i-1} \equiv y_{s_i-1} \rightarrow F_i x_0 \dots x_{s_i-1} \equiv F_i y_0 \dots y_{s_i-1}) : i \in I$
- A5: $\forall x_0 \dots \forall x_{\sigma_j-1} \forall y_0 \dots \forall y_{\sigma_j-1}$
 $(x_0 \equiv y_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{\sigma_j-1} \equiv y_{\sigma_j-1} \rightarrow R_j x_0 \dots x_{\sigma_j-1} \rightarrow R_j y_0 \dots y_{\sigma_j-1}) : j \in J$
- A6: $\Theta \rightarrow H \rightarrow \Theta$
- A7: $(\Theta \rightarrow H) \rightarrow (\Theta \rightarrow H \rightarrow \Phi) \rightarrow \Theta \rightarrow \Phi$
- A8: $\Theta \rightarrow H \rightarrow \Theta \wedge H$
- A9: $\Theta \wedge H \rightarrow \Theta$
- A10: $\Theta \wedge H \rightarrow H$
- A11: $\Theta \rightarrow \Theta \vee H$
- A12: $H \rightarrow \Theta \vee H$
- A13: $(\Theta \rightarrow \Phi) \rightarrow (H \rightarrow \Phi) \rightarrow \Theta \vee H \rightarrow \Phi$
- A14: $(\Theta \rightarrow H) \rightarrow (\Theta \rightarrow \neg H) \rightarrow \neg \Theta$
- A15: $\Theta \rightarrow \neg \Theta \rightarrow H$
- A16: $\forall x \Theta \rightarrow \Theta_x^t$
- A17: $\Theta_x^t \rightarrow \exists x \Theta$.

Definition 3: Grundschlüsse der intuitionistischen PIF-Logik sind:

- G1: $\Theta, \Theta \rightarrow H : H$
- G2: $H \rightarrow \Theta : H \rightarrow \forall x \Theta$
- G3: $\Theta \rightarrow H : \exists x \Theta \rightarrow H$.

Für G2 und G3 wird vorausgesetzt, daß $x \notin \text{Ind } H$.

Definition 4: Ableitbarkeit einer Formel:

1. Jedes Axiom ist eine ableitbare Formel.
2. Sind die Prämissen eines Grundschlusses ableitbare Formeln, so ist auch die entsprechende Konklusion ableitbar.

Definition 5: Ist Σ eine Formelmenge, so heißt Θ ableitbar aus Σ , wenn gilt: Es gibt ein $n \in \omega$ und $\Delta \in \Sigma^n$, so daß $\Delta \rightarrow \Theta$ ableitbar ist.

Ist Θ ableitbar, bzw. ist Θ ableitbar aus Σ , so schreiben wir $\vdash \Theta$ bzw. $\Sigma \vdash \Theta$.

Definition 6: Ist Σ eine Formelmenge, so sei

$\bar{\Sigma} = \{\Theta : \text{Ind } \Theta \subseteq \text{Ind } \Sigma \text{ und } \Theta \text{ ist ableitbar aus } \Sigma\}$.

Der in Definition 2 und Definition 3 gegebene Kalkül wird durch Hinzufügen des aussagenlogischen Axioms $\neg\neg\Theta \rightarrow \Theta$ zum Kalkül der klassischen Prädikatenlogik mit Funktionszeichen und Identität.

Folgende Sätze, die klassisch gültig sind, lassen sich auch in der intuitionistischen Prädikatenlogik beweisen.

Satz 1 (Schnittregel): Ist $\Delta \in \Sigma^n$ und ist $\vdash \Delta \rightarrow \Theta$ und $\vdash \Theta \rightarrow H$, so ist $\vdash \Delta \rightarrow H$.

Satz 2 (Strukturschlußregel): Ist $\Delta_1 \in \Sigma^n$ und $\vdash \Delta_1 \rightarrow \Theta$ und ist $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, so ist $\vdash \Delta_2 \rightarrow \Theta$.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze beweist man den folgenden:

Satz 3: Ist Σ eine beliebige Formelmengende, so ist $\bar{\Sigma} = \overline{\Sigma}$ und $\Sigma \subseteq \bar{\Sigma}$.

Satz 4: Gilt $GU\Theta H$, so ist $\vdash \Theta \rightarrow H$ und $\vdash H \rightarrow \Theta$.

§ 2. Semantik der intuitionistischen PIF-Logik

Im folgenden soll ein Modellbegriff der intuitionistischen PIF-Logik angegeben werden, der den Kalkül im § 1 semantisch charakterisiert.

Definition 1: $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M\}, \leq, \varphi \rangle$ heißt eine *K-Struktur* vom Typ $\tau = ((s_i)_{i \in I}, (\sigma_j)_{j \in J})$, wenn gilt:

1. M ist eine nicht leere Menge, die wir als die *Situationsmenge* von $\mathfrak{A}$ bezeichnen.

2. $\leq$ ist eine reflexive und transitive Relation auf M .

3. $\mathfrak{A}_\alpha$ ist eine Struktur $\langle A_\alpha, (f_i^\alpha)_{i \in I}, (r_j^\alpha)_{j \in J} \rangle$ vom Typ τ .

4. φ ist eine Funktion, die jedem $(\alpha, \beta) \in M \times M$ mit $\alpha \leq \beta$ einen Homomorphismus $\varphi^{\alpha\beta} : \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_\beta$ zuordnet, wobei $\varphi^{\alpha\alpha}$ der identische Homomorphismus ist und wobei $\varphi^{\beta\gamma} \varphi^{\alpha\beta}(a) = \varphi^{\alpha\gamma}(a)$ ist für alle $a \in A_\alpha$ und alle $\gamma \in M$ mit $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Definition 2: Unter einer *Interpretation* $I^\mathfrak{A}$ über der *K-Struktur* $\mathfrak{A}$ verstehen wir eine 2-stellige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $I^\mathfrak{A}$ ordnet zu jedem $\alpha \in M$ jedem $x \in \text{Ind}\mathfrak{F}$ ein Element $I^\mathfrak{A}_\alpha(x) \in A_\alpha$ zu, so daß für alle β mit $\alpha \leq \beta$ $I^\mathfrak{A}_\beta(x) = \varphi^{\alpha\beta}(I^\mathfrak{A}_\alpha(x))$ ist.

2. $I^\mathfrak{A}$ ordnet zu jedem $\alpha \in M$ jedem Funktionszeichen F_i aus $(F_i)_{i \in I}$ die Funktion $I^\mathfrak{A}_\alpha(F_i) = f_i^\alpha$ zu.

3. $I^\mathfrak{A}$ ordnet zu jedem $\alpha \in M$ jedem Relationszeichen R_j aus $(R_j)_{j \in J}$ die Relation $I^\mathfrak{A}_\alpha(R_j) = r_j^\alpha$ zu.

Definition 3: Das Paar $\langle \mathfrak{A}, I^\mathfrak{A} \rangle$ heißt ein Modell der intuitionistischen PIF-Logik oder kurz *i-PIF-Modell*.

Definition 4: (Termbewertung). Ist $t = F_i t_0 \dots t_{s_i-1}$, so ist $I^\mathfrak{A}_\alpha(t) = f_i^\alpha(I^\mathfrak{A}_\alpha(t_0), \dots, I^\mathfrak{A}_\alpha(t_{s_i-1}))$ für alle $\alpha \in M$.

Ist $\alpha \leq \beta$, so ist $\varphi^{\alpha\beta}(I^\mathfrak{A}_\alpha(t)) = I^\mathfrak{A}_\beta(t)$.

Definition 5: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^\mathfrak{A} \rangle$ ein *i-PIF-Modell* mit $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M\}, \leq, \varphi \rangle$, so heißt $\langle \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha, I^\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha \rangle$ mit $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha = \langle \{\mathfrak{A}_\beta : \beta \in M'\}, \leq', \varphi' \rangle$ das *Restmodell* von $\langle \mathfrak{A}, I^\mathfrak{A} \rangle$ auf α , wenn gilt:

1. $M' = \{\beta : \alpha \leq \beta\}$,

2. $\leq' = \leq \upharpoonright M' \times M'$,

3. $\varphi' = \varphi \upharpoonright M' \times M' \cap \{(\beta, \gamma) : \beta, \gamma \in M \text{ und } \beta \leq \gamma\}$,

4. $I^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ ist eine Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ mit $I^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha(x) = I^{\mathfrak{A}}_x(x)$ für alle $x \in \text{Ind}\mathfrak{F}$.

Sind $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}}_* \rangle$ zwei *i*-PIF-Modelle, so soll $I^{\mathfrak{A}}_* = I^{\mathfrak{A}}(I^{\mathfrak{A}}_* \stackrel{z}{=} I^{\mathfrak{A}})$ bedeuten, daß $I^{\mathfrak{A}}_{*\alpha}(y) = I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(y)$ ist für alle $\alpha \in M$ und alle $y \in \text{Ind}\mathfrak{F}$ (mit Ausnahme evtl. der Variablen x).

Und $I^{\mathfrak{A}}_* = I^{\mathfrak{A}}[\Theta]$ ($I^{\mathfrak{A}}_* \stackrel{z}{=} I^{\mathfrak{A}}[\Theta]$) soll bedeuten, daß $I^{\mathfrak{A}}_{*\alpha}(y) = I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(y)$ ist für alle $\alpha \in M$ und alle $y \in \text{Ind}\Theta$ (bis evtl. auf die Variable x).

Es folgt die Definition der *Erfüllungsrelation*.

Definition 6: Es sei $I^{\mathfrak{A}}$ eine Interpretation über $\mathfrak{A}$ und es sei $\alpha \in M$.

1. Ist $\Theta = t_1 \equiv t_2$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(t_1) = I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(t_2).$$

2. Ist $\Theta = R_i t_0 \dots t_{\sigma_i-1}$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow (I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(t_0), \dots, I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(t_{\sigma_i-1})) \in r_i^{\alpha}.$$

Ist $\Theta = R^0$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(R^0) = w.$$

3., 4. Ist $\Theta = \Theta_1 \stackrel{(\vee)}{\wedge} \Theta_2$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta_1 \text{ und (oder) } I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta_2.$$

5. Ist $\Theta = \exists x \Theta_1$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow$$

$$\text{E.g. } I^{\mathfrak{A}}_{*\alpha} \upharpoonright \alpha (I^{\mathfrak{A}}_{*\alpha} \stackrel{z}{=} I^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha \text{ und } I^{\mathfrak{A}}_{*\alpha} \text{ erf } \Theta_1).$$

6. Ist $\Theta = \forall x \Theta_1$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow$$

$$\text{F.a. } \beta \text{ F.a. } I^{\mathfrak{A}}_{*\beta} \upharpoonright \beta (\alpha \leq \beta \text{ und } I^{\mathfrak{A}}_{*\beta} \stackrel{z}{=} I^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{*\beta} \text{ erf } \Theta_1).$$

7. Ist $\Theta = \neg \Theta_1$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \leq \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\beta} \text{ erf nicht } \Theta_1).$$

8. Ist $\Theta = \Theta_1 \rightarrow \Theta_2$, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow$$

$$\text{F.a. } \beta (\alpha \leq \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\beta} \text{ erf nicht } \Theta_1 \text{ oder } I^{\mathfrak{A}}_{\beta} \text{ erf } \Theta_2).$$

Satz 1: Erfüllt $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ die Formel Θ und ist $\alpha \leq \beta$, so erfüllt $I^{\mathfrak{A}}_{\beta} \Theta$.

Beweis durch Induktion über die Länge der Formeln.

Es folgen die Definitionen der *Gültigkeit in einem i-PIF-Modell*, der *Allgemeingültigkeit* und der *Folgerung*.

Definition 7: Die Formel Θ heißt *gültig* in dem *i*-PIF-Modell $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wenn $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \Theta$ erfüllt für alle α aus der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$.

Die Formelmenge Σ heißt *gültig* in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wenn jede Formel von Σ darin gültig ist.

Definition 8: Die Formel Θ heißt *erfüllbar* in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wenn es ein α aus der Situationsmenge gibt, so daß Θ in $\langle \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha, I^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha \rangle$ gültig ist.

Definition 9: Die Formel Θ heißt *allgemeingültig*, wenn Θ in jedem *i*-PIF-Modell gültig ist. Wir schreiben dann $\Vdash \Theta$.

Definition 10: Die Formel Θ folgt aus der Formelmengende Σ , wenn Θ in jedem i -PIF-Modell gültig ist, in dem Σ gültig ist. Wir schreiben dann $\Sigma \Vdash \Theta$.

Die hier angegebenen Begriffe des i -PIF-Modells und der Erfüllungsrelation sind eine Verallgemeinerung der Kripke-Semantik auf die intuitionistische Logik mit Funktionszeichen und Gleichheitszeichen. Siehe Kripke [7].

Es gilt das Koinzidenztheorem und das Überführungstheorem.

Satz 2: Sind $I_1^{\mathfrak{A}}$ und $I_2^{\mathfrak{A}}$ zwei Interpretationen über der K -Struktur $\mathfrak{A}$ und ist $I_1^{\mathfrak{A}} = I_2^{\mathfrak{A}}[\Theta]$, so gilt für alle α aus der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$:

$$I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta.$$

Satz 3: Gilt $FE\Theta y t H$ und ist $I_1^{\mathfrak{A}} = I_2^{\mathfrak{A}}$ und ist $I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}}(y) = I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}}(t)$, so gilt:

$$I_{1\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I_{2\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } H.$$

Beweis durch Induktion über die Länge der Formeln.

§ 3. Die semantische Vollständigkeit des Kalküls der intuitionistischen PIF-Logik

In üblicher Weise kann durch Herleitungsinduktion gezeigt werden, daß $\vdash \Theta \Rightarrow \Vdash \Theta$. Daraus folgt der folgende Satz:

Satz 1: $\Sigma \vdash \Theta \Rightarrow \Sigma \Vdash \Theta$.

Für den Beweis der Umkehrung dieses Satzes werden einige neue Begriffe gebraucht, die zuerst eingeführt werden sollen. Ich habe sie von Aczel [1] übernommen und sie auf die hier verwandte Terminologie übertragen.

Dem Beweis selbst liegt die Beweisidee von Henkin für die klassische PIF-Logik zugrunde. Siehe Hermes [3].

Folgende Mengen von Formelmengen werden definiert.

Definition 1: Es sei $WF = \{\Sigma : \text{E.g. } \Phi(\text{Ind } \Phi \subseteq \text{Ind } \Sigma \text{ und } \Phi \notin \bar{\Sigma})\}$. Es sei $\Phi\text{-}WF = \{\Sigma : \text{Ind } \Phi \subseteq \text{Ind } \Sigma \text{ und } \Phi \notin \bar{\Sigma}\}$. Eine Formelmengende Σ heißt *widerspruchsfrei* bzw. *Φ -widerspruchsfrei*, wenn $\Sigma \in WF$ bzw. $\Sigma \in \Phi\text{-}WF$ ist.

Definition 2: Es sei $\Phi\text{-}MAX =$

$$\{\Sigma : \Sigma \in \Phi\text{-}WF \text{ und F.a. } \Theta(\text{Ind } \Theta \subseteq \text{Ind } \Sigma \Rightarrow \Theta \in \bar{\Sigma} \text{ oder } \Theta \rightarrow \Phi \in \bar{\Sigma})\}.$$

Definition 3: Es sei $VEL = \{\Sigma : \Theta \vee H \in \bar{\Sigma} \Rightarrow \Theta \in \bar{\Sigma} \text{ oder } H \in \bar{\Sigma}\}$.

Definition 4: Es sei $EX = \{\Sigma : \exists x \Theta \in \bar{\Sigma} \Rightarrow \text{E.g. } y(\Theta_x^y \in \bar{\Sigma})\}$.

Definition 5: Es sei $SA = \{\Sigma : \Sigma = \bar{\Sigma}, \Sigma \in WF, \Sigma \in VEL \text{ und } \Sigma \in EX\}$.

Es sei $\Phi\text{-}SA = \{\Sigma : \Sigma \in SA \text{ und } \Sigma \in \Phi\text{-}WF\}$. Ist $\Sigma \in SA$, so heißt Σ *saturiert*.

Bei Aczel [1] ist folgender Satz bewiesen.

Satz 2: Ist Σ eine Φ -widerspruchsfreie Formelmengende, so gibt es ein $F \in \Phi\text{-}SA$ mit $\Sigma \subseteq F$.

Beweisskizze:

Zunächst wird gezeigt, daß es zu jeder Φ -widerspruchsfreien Formelmengende Σ eine Formelmengende Σ^0 gibt mit $\Sigma \subseteq \Sigma^0$, $\Sigma^0 \in \Phi\text{-}MAX$ und $\Sigma^0 = \bar{\Sigma}^0$. Σ^0 ist ein maximales Element der Menge $X = \{\Sigma' : \Sigma' = \bar{\Sigma}', \Sigma' \in \Phi\text{-}WF, \Sigma \subseteq \Sigma', \text{Ind } \Sigma' = \text{Ind } \Sigma\}$. Ein maximales Element existiert auf Grund des Zornschen Lemmas, da jede Kette in X eine obere Schranke besitzt.

Dann wird gezeigt, daß es zu Σ^0 ein Σ^1 gibt mit $\Sigma^0 \subseteq \Sigma^1$, $\Sigma^1 \in \Phi\text{-MAX}$, $\Sigma^1 = \overline{\Sigma^1}$ und mit $\Theta_x^y \in \Sigma^1$ für mindestens ein y , falls $\exists x \Theta \in \Sigma^0$ ist. Durch abwechselnde Wiederholungen dieser beiden Beweisschritte erhält man schließlich eine Kette $\subseteq (\Sigma^n: b \in \omega)$, so daß $\Sigma^n \in \Phi\text{-MAX}$ ist, so daß $\Sigma^n = \overline{\Sigma^n}$ ist und so daß es zu jeder Formel $\exists x \Theta \in \Sigma^n$ eine Formel $\Theta_x^y \in \Sigma^{n+1}$ gibt für mindestens ein y . Es sei $F = \bigcup (\Sigma^n: n \in \omega)$. Man kann nun zeigen, daß $F \in \text{EX}$, daß $F = \overline{F}$, daß $F \in \Phi\text{-WF}$ und daß $F \in \Phi\text{-MAX}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen, denn jedes Element von $\Phi\text{-MAX}$ ist auch ein Element von VEL .

In dem Folgenden werden wir zu einer beliebigen widerspruchsfreien Formelmengenge ein $i\text{-PIF}$ -Modell angeben, in dem diese Formelmengenge gültig ist.

1. $M = \{\alpha: \Sigma \subseteq \alpha \text{ und } \alpha \in \text{SA}\}$ sei die *Situationsmenge*. Nach Satz 2 ist $M \neq \emptyset$.
2. Die *Relation auf der Situationsmenge* ist die Inklusion.
Es gilt also: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ für alle $\alpha, \beta \in M$.

3. Zu jedem $\alpha \in M$ konstruieren wir eine Struktur $\mathfrak{A}_\alpha$ vom Typ τ :

Es sei T_α die Menge aller Terme t mit $\text{Ind } t \subseteq \text{Ind } \alpha$.

Auf T_α definieren wir folgende Äquivalenzrelation:

Es sei $t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow t_1 \equiv t_2 \in \alpha$. Es sei $\bar{t}^\alpha$ die Äquivalenzklasse, der t angehört, und es sei $\overline{T}^\alpha$ die Menge aller Äquivalenzklassen, es ist also $\overline{T}^\alpha = \{\bar{t}^\alpha: t \in T_\alpha\}$.

Zu jedem $i \in I$ definieren wir eine Funktion $f_i^\alpha: \overline{T}^{\alpha^{s_i}} \rightarrow \overline{T}^\alpha$:

Es sei $f_i^\alpha(\bar{t}_0^\alpha, \dots, \bar{t}_{s_i-1}^\alpha) = \overline{F_i t_0 \dots t_{s_i-1}}^\alpha$.

Zu jedem $j \in J$ definieren wir eine Relation $r_j^\alpha \subseteq \overline{T}^{\alpha^{s_j}}$:

Es sei $(\bar{t}_0^\alpha, \dots, \bar{t}_{s_j-1}^\alpha) \in r_j^\alpha \Leftrightarrow R_j t_0 \dots t_{s_j-1} \in \alpha$.

Ist R^0 ein 0-stelliges Relationszeichen, so sei $r^0 = w \Leftrightarrow R^0 \in \alpha$.

Es sei $\mathfrak{A}_\alpha = \langle \overline{T}^\alpha, (f_i^\alpha)_{i \in I}, (r_j^\alpha)_{j \in J} \rangle$.

4. Die *Funktion* φ sei folgendermaßen definiert:

φ ordne jedem $(\alpha, \beta) \in M \times M$ mit $\alpha \subseteq \beta$ die Funktion $\varphi^{\alpha\beta}: \overline{T}^\alpha \rightarrow \overline{T}^\beta$ zu mit $\varphi^{\alpha\beta}(\bar{t}^\alpha) = \bar{t}^\beta$ für alle $\bar{t}^\alpha \in \overline{T}^\alpha$.

Es kann leicht gezeigt werden, daß $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha: \alpha \in M, \subseteq, \varphi \rangle$ eine K -Struktur ist.

5. Die *Interpretation* $I^{\mathfrak{A}}$ über $\mathfrak{A}$ ist folgendermaßen definiert: Es ist $I_\alpha^{\mathfrak{A}}(t) = \bar{t}^\alpha$, wie man durch Induktion über den Aufbau der Terme zeigen kann, wenn man $I_\alpha^{\mathfrak{A}}(x) = \bar{x}^\alpha$ definiert für alle $x \in \text{Ind } \mathfrak{F}$ und alle $\alpha \in M$.

Damit ist also gezeigt, daß $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein $i\text{-PIF}$ -Modell ist.

Mit dem folgenden Satz wird die Verbindung zwischen der Semantik und der Syntax unserer Logik hergestellt.

Satz 3: Ist Θ eine beliebige Formel mit $\text{Ind } \Theta \subseteq \text{Ind } \alpha$ und ist $\alpha \in M$, so gilt:

$$I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow \Theta \in \alpha.$$

Beweis (durch Induktion über die Länge der Formeln):

1., 2. Ist Θ eine Primformel, so gilt die Behauptung auf Grund der Definition von $\mathfrak{A}_\alpha$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$.

3. Ist Θ eine Konjunktion, so gilt die Behauptung auf Grund der Axiome A8, A9, A10.

4. Ist Θ eine Disjunktion, so gilt die Behauptung auf Grund der Axiome A11 oder A12 und da $\alpha \in \text{VEL}$ ist.

5. $\Theta = \exists x \Theta_1$. „ $\Rightarrow$ “

$I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta$.

$\Rightarrow$ E.g. $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha \text{ erf } \Theta_1)$.

Es sei $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (x) = \bar{t}^\alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (t)$. Es sei $GU \Theta_1 H_1$, so daß in H_1 keine Variable, die in t vorkommt, gebunden ist. Nach Satz 4 § 1 und Satz 1 erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha H_1$. Da $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ und da $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (x) = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (t)$ ist, erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha H_1 \bar{t}^\alpha$. Es ist also $H_1 \bar{t}^\alpha \in \alpha$, das heißt, es ist $\alpha \vdash \exists x H_1$ (A17). Es gilt $GU \exists x H_1 \exists x \Theta_1$. Deshalb ist $\alpha \vdash \exists x \Theta_1$ und damit $\exists x \Theta_1 \in \alpha$.

„ $\Leftarrow$ “

$\exists x \Theta_1 \in \alpha$.

$\Rightarrow$ Es gibt ein y mit $\Theta_1 \bar{y}^\alpha \in \alpha$, da $\alpha \in \text{EX}$. $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ erfüllt $\Theta_1 \bar{y}^\alpha$. Es ist $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (y) = \bar{y}^\alpha$. Es sei $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ und es sei $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (x) = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (y)$. $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ erfüllt Θ_1 nach Satz 3 § 2. Es gilt also: E.g. $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha \text{ erf } \Theta_1)$. Daraus folgt die Behauptung.

6. $\Theta = \forall x \Theta_1$. „ $\Rightarrow$ “

$I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \forall x \Theta_1$.

$\Rightarrow$ F.a. β F.a. $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha (\alpha \subseteq \beta$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha \Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta \text{ erf } \Theta_1)$.

Wir nehmen an, daß $\forall x \Theta_1 \notin \alpha$. Es sei $y \notin \text{Ind } \alpha \cup \{\Theta_1\}$. Dann ist $\alpha \cup \{\Theta_1 \bar{y}^\alpha \rightarrow \Theta_1 \bar{y}^\alpha\} \in \in \Theta_1 \bar{y}^\alpha$ -WF. Denn wäre $\alpha \cup \{\Theta_1 \bar{y}^\alpha \rightarrow \Theta_1 \bar{y}^\alpha\} \vdash \Theta_1 \bar{y}^\alpha$, so wäre $\alpha \vdash \Theta_1 \bar{y}^\alpha$ und es wäre auch $\alpha \vdash \forall y \Theta_1 \bar{y}^\alpha$. Da $GU \forall y \Theta_1 \bar{y}^\alpha \forall x \Theta_1$, ist $\alpha \vdash \forall x \Theta_1$, also $\forall x \Theta_1 \in \alpha$. Widerspruch!

Es ist also $\alpha \cup \{\Theta_1 \bar{y}^\alpha \rightarrow \Theta_1 \bar{y}^\alpha\} \in \Theta_1 \bar{y}^\alpha$ -WF. Nach Satz 2 gibt es ein β mit $\alpha \cup \{\Theta_1 \bar{y}^\alpha \rightarrow \Theta_1 \bar{y}^\alpha\} \subseteq \beta$ und $\beta \in \Theta_1 \bar{y}^\alpha$ -SA. Es gibt also ein $\beta \in M$ mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\Theta_1 \bar{y}^\alpha \notin \beta$. Es sei $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta (x) = \bar{y}^\beta = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta (y)$. Da $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta \Theta_1$ erfüllt, erfüllt nach Satz 3 § 2 $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta \Theta_1 \bar{y}^\alpha$, das heißt, es ist $\Theta_1 \bar{y}^\alpha \in \beta$. Widerspruch!

Es ist also $\forall x \Theta_1 \in \alpha$.

„ $\Leftarrow$ “

$\forall x \Theta_1 \in \alpha$.

Wir nehmen an, daß $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ nicht $\forall x \Theta_1$ erfüllt. Dann gilt:

E.g. β E.g. $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta (\alpha \subseteq \beta$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta$ und $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta \text{ erf nicht } \Theta_1)$. Es sei $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta (x) = \bar{t}^\beta = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta (t) = I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta (t)$. Es sei $GU \Theta_1 H_1$, so daß in H_1 keine Variable, die in t vorkommt, gebunden ist. Dann erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta$ nicht H_1 und deshalb erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \beta$ nicht $H_1 \bar{t}^\beta$. Es ist also $H_1 \bar{t}^\beta \notin \beta$. Da $GU \forall x \Theta_1 \forall x H_1$ und da $\forall x \Theta_1 \in \beta$, ist $\beta \vdash \forall x H_1$ und damit $\forall x H_1 \in \beta$. Da $\vdash \forall x H_1 \rightarrow H_1 \bar{t}^\beta$, ist $\beta \vdash H_1 \bar{t}^\beta$. Da $t \in \bar{t}^\beta$, ist $\text{Ind } t \subseteq \text{Ind } \beta$. Deshalb ist $H_1 \bar{t}^\beta \in \beta$. Widerspruch! $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erfüllt also $\forall x \Theta_1$.

7. $\Theta = \neg \Theta_1$. „ $\Leftarrow$ “

$I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta$.

$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}} \text{ erf nicht } \Theta_1$).

$\Rightarrow$ F.a. β ($\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta$).

Wir nehmen an, daß $\neg \Theta_1 \notin \alpha$. Dann ist $\alpha \cup \{\Theta_1\} \in \neg \Theta_1$ -WF. Denn wäre $\alpha \cup \{\Theta_1\} \vdash \neg \Theta_1$, so wäre $\alpha \vdash \Theta_1 \rightarrow \neg \Theta_1$ und damit auch $\alpha \vdash \neg \Theta_1$ nach

Axiom A 14. Das heißt, es wäre $\neg \Theta_1 \in \alpha$. Widerspruch! Da also $\alpha \cup \{\Theta_1\} \in \neg \Theta_1$ -WF ist, gibt es nach Satz 2 ein β mit $\alpha \cup \{\Theta_1\} \subseteq \beta$ und $\beta \in \neg \Theta_1$ -SA. Es ist also $\beta \in M$ und $\alpha \subseteq \beta$ und $\Theta_1 \in \beta$. Widerspruch! Es ist also $\neg \Theta_1 \in \alpha$.

„ $\Leftarrow$ “

$$\neg \Theta_1 \in \alpha.$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \neg \Theta_1 \in \beta).$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta), \text{ da alle } \beta \text{ widerspruchsfrei sind.}$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}} \text{ erf nicht } \Theta_1).$$

$$\Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \neg \Theta_1.$$

$$8. \Theta = \Theta_1 \rightarrow \Theta_2.$$

„ $\Rightarrow$ “

$$I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta.$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}} \text{ erf nicht } \Theta_1 \text{ oder } I_\beta^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta_2).$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta \text{ oder } \Theta_2 \in \beta).$$

Wir nehmen an, daß $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \notin \alpha$ ist. Dann ist $\alpha \in \Theta_1 \rightarrow \Theta_2$ -WF und deshalb $\alpha \cup \{\Theta_1\} \in \Theta_2$ -WF. Nach Satz 2 gibt es ein β mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\beta \in \Theta_2$ -SA, so daß $\Theta_1 \in \beta$ und $\Theta_2 \in \beta$. Widerspruch! Es ist also $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \in \alpha$.

„ $\Leftarrow$ “

$$\Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \in \alpha.$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \in \beta).$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \Theta_1 \notin \beta \text{ oder } \Theta_2 \in \beta), \text{ denn ist } \Theta_1 \in \beta, \text{ so ist } \beta \vdash \Theta_2 \text{ und deshalb ist } \Theta_2 \in \beta.$$

$$\Rightarrow \text{F.a. } \beta (\alpha \subseteq \beta \Rightarrow I_\beta^{\mathfrak{A}} \text{ erf nicht } \Theta_1 \text{ oder } I_\beta^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta_2).$$

$$\Rightarrow I_\alpha^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta_1 \rightarrow \Theta_2.$$

Aus Satz 3 folgt:

$$\text{Satz 4: } \Sigma \Vdash \Theta \Rightarrow \Sigma \vdash \Theta.$$

Beweis:

Annahme, es ist nicht $\Sigma \vdash \Theta$. Dann ist $\Sigma' = \Sigma \cup \{\Theta \rightarrow \Theta\} \in \Theta$ -WF. Nach Satz 2 gibt es ein $\Sigma^* \in \Theta$ -SA mit $\Sigma' \subseteq \Sigma^*$. Nach Satz 3 gibt es ein i -PIF-Modell $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und ein α aus der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$, so daß $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ genau dann Φ mit $\text{Ind } \Phi \subseteq \subseteq \text{Ind } \Sigma^*$ erfüllt, wenn $\Phi \in \Sigma^*$ ist. Da $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ jede Formel von Σ erfüllt, erfüllt $I_\alpha^{\mathfrak{A}} \Theta$. Da $\text{Ind } \Theta \subseteq \text{Ind } \Sigma^*$, ist $\Theta \in \Sigma^*$. Widerspruch! Es ist also $\Sigma \vdash \Theta$.

Zusammen mit Satz 1 gilt:

$$\text{Satz 5: } \Sigma \Vdash \Theta \Leftrightarrow \Sigma \vdash \Theta.$$

Aus Satz 5 folgt unmittelbar der *Endlichkeitssatz*:

Satz 6: Zu jeder Formelmeng Σ gibt es genau dann ein i -PIF-Modell, in dem sie gültig ist, wenn für jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ein i -PIF-Modell existiert, in dem Σ' gültig wird.

Kapitel 2

Modelltheorie der intuitionistischen PIF-Logik

§ 1. Klassische Erfüllbarkeit und intuitionistische Erfüllbarkeit

Es sollen zuerst einige semantische Grundbegriffe gegeben werden und einige Sätze über ihren Zusammenhang angeführt werden, die wir bei Schütte [9] finden und die sich leicht auf die hier verwandte allgemeinere Logik übertragen lassen.

Definition 1: Eine Formel Θ heißt *erfüllbar*, wenn es ein i -PIF-Modell gibt, in dem sie gültig wird.

Definition 2: Eine Formel Θ heißt *endlich erfüllbar*, wenn es ein i -PIF-Modell mit einer endlichen Situationsmenge gibt, in dem Θ gültig wird.

Definition 3: Eine Formel Θ heißt *endlich allgemein erfüllbar*, wenn sie in jedem i -PIF-Modell mit endlicher Situationsmenge erfüllbar ist.

Definition 4: Eine Formel Θ heißt *allgemein erfüllbar*, wenn sie in jedem i -PIF-Modell erfüllbar ist.

Definition 5: Eine Formel Θ heißt *endlich allgemeingültig*, wenn sie in jedem i -PIF-Modell mit endlicher Situationsmenge gültig ist.

Es werden also 6 Klassen von Formeln unterschieden:

- A: allgemeingültige Formeln,
- B: endlich allgemeingültige Formeln,
- C: allgemein erfüllbare Formeln,
- D: endlich allgemein erfüllbare Formeln,
- E: endlich erfüllbare Formeln und
- F: erfüllbare Formeln.

Von den Klassen B und C ist keine in der anderen enthalten. Im übrigen ist jede Formelklasse in der darauf folgenden Formelklasse echt enthalten.

Die Formelklassen A, C, D, E, F können folgendermaßen syntaktisch charakterisiert werden:

- Eine Formel Θ gehört dann zur Formelklasse A,
wenn Θ in der intuitionistischen PIF-Logik ableitbar ist;
- Θ gehört genau dann zur Formelklasse C,
wenn $\neg \neg \Theta$ in der intuitionistischen PIF-Logik ableitbar ist;
- Θ gehört genau dann zur Formelklasse D,
wenn Θ in der klassischen PIF-Logik ableitbar ist;
- Θ gehört genau dann zur Formelklasse E,
wenn $\neg \Theta$ nicht in der klassischen PIF-Logik ableitbar ist und
- Θ gehört genau dann zur Formelklasse F,
wenn $\neg \Theta$ nicht in der intuitionistischen PIF-Logik ableitbar ist.

Besteht in dem i -PIF-Modell $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ mit $\mathfrak{A} = \langle \{ \mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M \}, \leq, \varphi \rangle$ und $\mathfrak{A}_\alpha = \langle A_\alpha, (f_i^\alpha)_{i \in I}, (r_j^\alpha)_{j \in J} \rangle$ die Menge M nur aus einem Element, ist also $M = \{ \alpha \}$, so ist die Definition von „ $I_\alpha^{\mathfrak{A}}$ erfüllt Θ “ identisch mit der Definition der klassischen Erfüllungsrelation.

Das gleiche gilt, falls α ein maximales Element von $\langle M, \leq \rangle$ ist.

Das soll nun genauer untersucht werden.

Jede Interpretation $I^{\mathfrak{A}}$ über der K -Struktur $\mathfrak{A}$ gibt Anlaß zu einer klassischen Interpretation $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ über der Struktur $\mathfrak{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in M$. Wir setzen:

$I^{\mathfrak{A}_\alpha}(x) = I_\alpha^{\mathfrak{A}}(x) = I_\alpha^{\mathfrak{A}'}(x)$ für alle $x \in \text{Ind} \mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{A}' = \langle \{ \mathfrak{A}_\alpha \}, \leq \vdash \{ \alpha \} \times \{ \alpha \} \rangle$, $\varphi \vdash \{ \alpha \} \times \{ \alpha \}$ ist.

$\langle \mathfrak{A}_\alpha, I^{\mathfrak{A}_\alpha} \rangle$ ist ein Modell der klassischen PIF-Logik, wir nennen es kurz ein *PIF-Modell*.

Es läßt sich nun durch Induktion über den Aufbau der Terme zeigen, daß $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(t) = I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}(t) = I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}(t)$ ist für alle Terme t . Und durch Induktion über die Länge der Formeln beweist man, daß $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \Theta$ (klassisch) erfüllt genau dann, wenn $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'} \Theta$ erfüllt für alle Formeln Θ .

Und umgekehrt gibt jede Interpretation $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ über der Struktur $\mathfrak{A}_{\alpha}$ Anlaß zu einer Interpretation $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}$ über der K -Struktur $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$. Denn $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}$ ist ja vollständig bestimmt, wenn $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha' \upharpoonright \alpha}(x)$ für alle $x \in \text{Ind}\mathfrak{F}$ definiert ist.

Wir setzen $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha' \upharpoonright \alpha}(x) = I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(x)$ für alle $x \in \text{Ind}\mathfrak{F}$.

$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ nennen wir die von $I^{\mathfrak{A}}$ induzierte Interpretation, bzw. $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}$ nennen wir die von $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ induzierte Interpretation.

In den folgenden Sätzen soll die klassische Erfüllungsrelation „ $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erfüllt Θ “ mit der intuitionistischen Erfüllungsrelation „ $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ erfüllt Θ “ verglichen werden.

Satz 1: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein i -PIF-Modell und ist α ein maximales Element der Situationsmenge, so gilt, falls $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ die von $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}$ induzierte Interpretation ist:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha'} \text{ erf } \Theta.$$

Beweis durch Induktion über die Länge der Formeln.

Aus diesem Satz folgt:

Satz 2: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein endliches i -PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, so gibt es ein α aus der Situationsmenge, so daß $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \Theta$ erfüllt (endlich bedeutet mit endlicher Situationsmenge).

Die Umkehrung von Satz 2 ist im allgemeinen falsch. In dem folgenden Beispiel wird sogar gezeigt, daß eine klassisch allgemeingültige Formel nicht in jedem i -PIF-Modell mit endlicher Situationsmenge gültig zu sein braucht.

Beispiel 1: Es sei $\Theta = \exists x (\neg x \equiv F^0) \vee \forall x (x \equiv F^0)$. Diese Formel ist klassisch allgemeingültig. Es sei $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ mit $\mathfrak{A}_0 = \langle \{0\}, 0 \rangle$ und $\mathfrak{A}_1 = \langle \{0, 1\}, 0 \rangle$, und es sei $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(0) = 0$. Ist $I^{\mathfrak{A}}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}$, so ist Θ nicht in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ gültig, da $I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \Theta$ nicht erfüllt.

Mit dem nächsten Beispiel soll gezeigt werden, daß es ein i -PIF-Modell $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gibt, so daß sogar die Negation der Formel $\Theta = \exists x (\neg x \equiv F^0) \vee \forall x (x \equiv F^0)$ in $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gültig ist. Nach Satz 2 ist dafür notwendig, daß $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ nicht endlich ist.

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{B} = \langle \{\mathfrak{B}_n : n \in \omega\}, \leq, \varphi^* \rangle$ mit $\mathfrak{B}_{2n} = \langle \{0, 2\}, 0 \rangle$ und $\mathfrak{B}_{2n+1} = \langle \{0\}, 0 \rangle$ für alle $n \in \omega$. $\leq$ sei die übliche kleiner-gleich-Relation auf den natürlichen Zahlen. Es sei $\varphi^{2n2n+1}(0) = \varphi^{2n2n+1}(2) = 0$ und es sei $\varphi^{2n+12(n+1)}(0) = 0$ für alle $n \in \omega$. (Die letzte Gleichung und auch die davor ist schon durch die Homomorphie-eigenschaft von φ^{nn+1} bestimmt.) $I^{\mathfrak{B}}$ sei eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{B}$. $I^{\mathfrak{B}}_n$ erfüllt nicht Θ für alle $n \in \omega$, das heißt, $I^{\mathfrak{B}}_n$ erfüllt $\neg \Theta$ für alle $n \in \omega$.

Um weitere Zusammenhänge zwischen der klassischen und intuitionistischen Erfüllbarkeit zu finden, ordnen wir jeder Formel Θ eindeutig eine Formel $N(\Theta)$ zu, die wir die Normalform von Θ nennen.

Definition 1: Induktive Definition der Normalform:

1. 2. Θ ist Primformel.

$N(\Theta) = \Theta$.

$$3. 4. \quad \Theta = \Theta_1 \overset{(\vee)}{\wedge} \Theta_2.$$

$$N(\Theta) = N(\Theta_1) \overset{(\wedge)}{\vee} N(\Theta_2).$$

$$5. 6. \quad \Theta = \exists x \Theta_1. \quad (\Theta = \forall x \Theta_1.)$$

$$N(\Theta) = \exists x N(\Theta_1). \quad (N(\Theta) = \forall x N(\Theta_1).)$$

$$7. \quad \Theta = \neg \Theta_1.$$

a. b. Θ_1 ist Primformel.

$$N(\Theta) = \Theta.$$

$$c. d. \quad \Theta_1 = \Theta'_1 \overset{(\vee)}{\wedge} \Theta'_2.$$

$$N(\Theta) = N(\neg \Theta'_1) \overset{(\wedge)}{\vee} N(\neg \Theta'_2).$$

$$e. f. \quad \Theta_1 = \exists x \Theta'_1. \quad (\Theta_1 = \forall x \Theta'_1.)$$

$$N(\Theta) = \forall x N(\neg \Theta'_1). \quad (N(\Theta) = \exists x N(\neg \Theta'_1).)$$

$$g. \quad \Theta_1 = \neg \Theta'_1.$$

$$N(\Theta) = N(\Theta'_1).$$

$$h. \quad \Theta_1 = \Theta'_1 \rightarrow \Theta'_1.$$

$$N(\Theta) = N(\Theta'_1) \wedge N(\neg \Theta'_2).$$

$$8. \quad \Theta = \Theta_1 \rightarrow \Theta_2.$$

$$N(\Theta) = N(\neg \Theta_1) \vee N(\Theta_2).$$

Θ und $N(\Theta)$ sind in der klassischen Logik äquivalent. In der intuitionistischen Logik sind Θ und $N(\Theta)$ nicht äquivalent, denn in einem i -PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, braucht nicht notwendig $N(\Theta)$ gültig zu sein.

Folgende Zusammenhänge zwischen Θ und $N(\Theta)$ bestehen in der intuitionistischen Logik, wie man durch Induktion über die Länge der Formeln beweist.

Satz 3: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein i -PIF-Modell und ist α ein Element der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$, so gilt:

$$\text{F.a. } \Theta (I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } N(\Theta) \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta).$$

Satz 4: Ist Θ eine Formel, in der keine Quantoren vorkommen, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Rightarrow \text{E.g. } \beta (\alpha \leq \beta \text{ und } I^{\mathfrak{A}}_{\beta} \text{ erf } N(\Theta)).$$

Durch Induktion über die Länge von $N(\Theta)$ kann folgender Satz gezeigt werden:

Satz 5: Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein i -PIF-Modell und ist α ein Element aus der Situationsmenge von $\mathfrak{A}$, so gilt für alle Formeln Θ :

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } N(\Theta) \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \text{ (klassisch).}$$

Aus Satz 4 und Satz 5 folgt unmittelbar:

Satz 6: Ist Θ eine Formel, in der keine Quantoren vorkommen, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Rightarrow \text{E.g. } \beta (\alpha \leq \beta \text{ und } I^{\mathfrak{A}}_{\beta} \text{ erf } \Theta).$$

Nachdem wir nun einige Sätze angegeben haben, die zeigen, unter welchen Bedingungen aus der intuitionistischen Gültigkeit die klassische folgt, sollen nun Bedingungen angegeben werden, unter denen aus der klassischen Gültigkeit die intuitionistische folgt, wie man durch Induktion über die Länge der Formeln zeigen kann.

Satz 7: Enthält die Formel $N(\Theta)$ keinen Existenzquantor und kein Disjunktionszeichen, so gilt:

$$\text{F.a. } \beta (\alpha \leq \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta) \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta.$$

Satz 8: Enthält die Formel $N(\Theta)$ keinen Allquantor und kein Negationszeichen, so gilt:

$$I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta \Rightarrow I^{\mathfrak{A}}_{\alpha} \text{ erf } \Theta.$$

§ 2. Die Begriffe des k -Homomorphismus, der k -Unterstruktur und des k -Ultraprodukts

In diesem Paragraphen wird der semantische Begriff des k -Homomorphismus, der Begriff der k -Unterstruktur und der Begriff des k -Ultraprodukts als Verallgemeinerungen der entsprechenden klassischen Begriffe definiert.

Dann wird untersucht, welche Formeln und unter welchen Bedingungen sie bei diesen semantischen Operationen gültig bleiben.

Im folgenden seien $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ zwei i -PIF-Modelle, wobei $\mathfrak{A} = \langle \{ \mathfrak{A}_{\alpha} : \alpha \in M, \leq, \varphi \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle \{ \mathfrak{B}_{\alpha} : \alpha \in M, \leq, \varphi^* \rangle$ zwei K -Strukturen vom Typ τ sind.

Definition 1: Die Funktion ψ heißt ein k -Homomorphismus von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ in $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$, wir schreiben: $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$, wenn gilt:

1. ψ ordnet jedem $\alpha \in M$ einen Homomorphismus $\psi^{\alpha} : \mathfrak{A}_{\alpha} \rightarrow \mathfrak{B}_{\alpha}$ zu.
2. Sind $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha \leq \beta$, so ist $\psi^{\alpha\beta} \psi^{\alpha}(a) = \psi^{\beta\alpha\beta}(a)$ für alle $a \in |\mathfrak{A}|$.
3. Für alle $\alpha \in M$ und alle $x \in \text{Ind}\mathfrak{F}$ ist $\psi^{\alpha}(I^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(x)) = I^{\mathfrak{B}}_{\alpha}(x)$.

ψ heißt ein k -Epimorphismus (k -Isomorphismus), wenn ψ^{α} ein Epimorphismus (Isomorphismus) ist für alle $\alpha \in M$. $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ heißt ein k -homomorphes Bild von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wenn es einen k -Epimorphismus $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gibt.

Gegenüber dem klassischen Fall können wir hier zwei Arten der Invarianz einer Formel unterscheiden.

Definition 2: Eine Formel Θ heißt (streng) invariant gegenüber k -Homomorphismen, wenn gilt:

Ist $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein beliebiges i -PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, und ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein beliebiges k -homomorphes Bild von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, so gibt es eine Situation α , so daß Θ in $\langle \mathfrak{B} \upharpoonright \alpha, I^{\mathfrak{B}} \upharpoonright \alpha \rangle$ gültig wird (so ist Θ in $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gültig).

Definition 3: Eine Formel Θ heißt (streng) invariant gegenüber k -Urbildern, wenn gilt:

Ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein beliebiges i -PIF-Modell, in dem Θ gültig ist, und ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ k -homomorphes Bild des i -PIF-Modells $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, so gibt es eine Situation α , so daß Θ in $\langle \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha, I^{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha \rangle$ gültig wird (so ist Θ in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ gültig).

Folgende Beziehungen bestehen zwischen den 4 Arten der Invarianz:

Satz 1: Ist Θ invariant gegenüber k -Homomorphismen, so ist $\neg \Theta$ streng invariant gegenüber k -Urbildern.

Satz 2: Ist $\neg \Theta$ invariant gegenüber k -Urbildern, so ist Θ invariant gegenüber k -Homomorphismen.

Satz 3: Ist $\neg \Theta$ invariant gegenüber k -Homomorphismen, so ist Θ invariant gegenüber k -Urbildern.

Satz 4: Ist Θ invariant gegenüber k -Urbildern, so ist $\neg \Theta$ streng invariant gegenüber k -Homomorphismen.

Mit dem folgenden Beispiel soll gezeigt werden, daß nicht jede Formel, die in der klassischen Modelltheorie invariant gegenüber Homomorphismen ist, auch invariant ist gegenüber k -Homomorphismen.

Beispiel 1: Es sei $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_n : n \in \omega, \leq, \varphi \rangle$ mit $\mathfrak{A}_{2n} = \langle \{0, 1, 2\}, 0 \rangle$ und $\mathfrak{A}_{2n+1} = \langle \{0, 1\}, 0 \rangle$ für alle $n \in \omega$. $\leq$ sei die übliche kleiner-gleich-Relation auf den natürlichen Zahlen. Es sei $\frac{2n}{\varphi}(0) = \frac{2n}{\varphi}(2) = 0$ und $\frac{2n}{\varphi}(1) = 1$. Und es sei $\frac{2n+1}{\varphi}(0) = 0$ und $\frac{2n+1}{\varphi}(1) = 1$. Das gelte für alle $n \in \omega$. $\mathfrak{B}$ sei die K -Struktur aus Beispiel 2, § 1. $I^{\mathfrak{A}}$ sei eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}$ und $I^{\mathfrak{B}}$ eine beliebige über $\mathfrak{B}$ aber mit der in Definition 1.3. geforderten Eigenschaft. Der k -Epimorphismus $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ sei so definiert: Es sei $\psi(0) = \frac{2n}{\psi}(1) = 0$ und es sei $\psi(2) = 2$ und es sei $\frac{2n+1}{\psi}(0) = \frac{2n+1}{\psi}(1) = 0$ für alle $n \in \omega$.

Die klassisch allgemeingültige Formel $\Theta = \forall x(x \equiv F^0) \vee \exists x(\neg x \equiv F^0)$ ist invariant gegenüber Homomorphismen, aber nicht invariant gegenüber k -Homomorphismen. Denn sie ist in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ gültig, da $\exists x(\neg x \equiv F^0)$ in $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ gültig ist, aber es ist $\neg \Theta$ in $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ gültig.

Es gilt aber folgender Satz:

Satz 5: Ist Θ eine Formel, so daß $N(\Theta)$ kein Negationszeichen enthält, so ist Θ streng invariant gegenüber k -Homomorphismen.

Beweis:

Es sei $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein k -Epimorphismus und es sei Θ eine beliebige Formel, die die Voraussetzung von Satz 5 erfüllt. Durch geschachtelte Induktion über die Länge der Formeln wird gezeigt:

$$I_{\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Rightarrow I_{\alpha}^{\mathfrak{B}} \text{ erf } \Theta.$$

In ähnlicher Weise beweist man:

Satz 6: Ist Θ eine Formel, so daß vor jeder Primformel in $N(\Theta)$ ein Negationszeichen steht, so ist Θ streng invariant gegenüber k -Urbildern.

Satz 7: Ist $\psi : \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein k -Isomorphismus, so gilt für alle Formeln Θ :

$$I_{\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow I_{\alpha}^{\mathfrak{B}} \text{ erf } \Theta.$$

Nun wenden wir uns dem Begriff des k -Untermodells eines i -PIF-Modells zu.

Definition 4: $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ heißt ein k -Untermodell von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wir schreiben $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, wenn gilt:

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\mathfrak{B}_{\alpha}$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}_{\alpha}$.
2. Für alle $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha \leq \beta$ ist $\frac{\alpha}{\varphi}^{\beta} = \frac{\alpha}{\varphi}^{\beta} \upharpoonright |\mathfrak{B}_{\alpha}|$.
3. Für alle $\alpha \in M$ und alle $x \in \text{Ind } \mathfrak{F}$ ist $I_{\alpha}^{\mathfrak{A}}(x) = I_{\alpha}^{\mathfrak{B}}(x)$.

Ist $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$ ein k -Untermodell von $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$, so heißt $\langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ ein k -Obermodell von $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle$.

Wie beim k -Homomorphismus können wir auch hier zwei Arten der Invarianz gegenüber k -Untermodellen bzw. gegenüber k -Obermodellen unterscheiden und entsprechende Sätze wie beim k -Homomorphismus beweisen.

Und das Beispiel in diesem Paragraphen zeigt, daß nicht jede Formel, die in der klassischen Modelltheorie invariant gegenüber Untermodellen ist, auch invariant gegenüber k -Untermodellen ist.

Es gilt aber der folgende Satz:

Satz 8: Ist Θ eine Formel, so daß $N(\Theta)$ keinen Existenzquantor enthält, so ist Θ streng invariant gegenüber k -Untermodellen.

Beweis:

Es sei $\langle \mathfrak{B}, I^{\mathfrak{B}} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{A}, I^{\mathfrak{A}} \rangle$ und es sei Θ eine beliebige Formel, die die Voraussetzung dieses Satzes erfüllt. Wir zeigen durch geschachtelte Induktion über die Länge der Formeln, daß für alle $\alpha \in M$ gilt:

$$I_{\alpha}^{\mathfrak{A}} \text{ erf } \Theta \Rightarrow I_{\alpha}^{\mathfrak{B}} \text{ erf } \Theta.$$

In ähnlicher Weise wird folgender Satz bewiesen:

Satz 9: Ist Θ eine Formel, so daß $N(\Theta)$ keinen Allquantor enthält, so ist Θ streng invariant gegenüber k -Obermodellen.

Im folgenden soll die Ultraproduktkonstruktion der klassischen Modelltheorie auf die intuitionistische Modelltheorie übertragen werden und ein dem klassischen Hauptsatz über Ultraprodukte entsprechender Satz angegeben werden.

Der Einfachheit halber soll im folgenden vorausgesetzt werden, daß die K -Strukturen vom Typ $\tau = ((2), (3))$ sind. Das heißt also, in den Strukturen kommt nur eine 2-stellige Funktion und 3-stellige Relation vor. Die Konstruktionen und Sätze, die hier angegeben werden, lassen sich auf den allgemeinen Fall übertragen.

Das der 2-stelligen Funktion entsprechende Funktionszeichen sei F , das der 3-stelligen Relation entsprechende Relationszeichen sei R .

Im folgenden sei L eine beliebige nicht leere Menge und $(\langle \mathfrak{A}^i, I^{\mathfrak{A}^i} \rangle)_{i \in L}$ eine L -Folge von i -PIF-Modellen mit $\mathfrak{A}^i = \langle \{ \mathfrak{A}_{\alpha}^i : \alpha \in M \}, \leq, \varphi_i \rangle$ und $\mathfrak{A}_{\alpha}^i = \langle A_{\alpha}^i, f_{\alpha}^i, r_{\alpha}^i \rangle$, wobei $\mathfrak{A}^i$ eine K -Struktur vom Typ $\tau = ((2), (3))$ ist.

Es sei D ein Ultrafilter auf L .

Definition 5: Das i -PIF-Modell $\langle \overline{\mathfrak{A}}, I^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle$ mit $\overline{\mathfrak{A}} = \langle \{ \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha} : \alpha \in M \}, \leq, \overline{\varphi} \rangle$ und $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha} = \langle \overline{A}_{\alpha}, \overline{f}_{\alpha}, \overline{r}_{\alpha} \rangle$ heißt das k -Ultraprodukt von $(\langle \mathfrak{A}^i, I^{\mathfrak{A}^i} \rangle)_{i \in L}$ bezüglich D , wenn gilt:

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha}$ das Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}_{\alpha}^i)_{i \in L}$ bezüglich D .
2. Sind $\alpha, \beta \in M$ und ist $\overline{(a_i)_{i \in L}} \in \overline{A}_{\alpha}$, so ist $\overline{\varphi}^{\alpha\beta} (a_i)_{i \in L} = \overline{(\varphi_i^{\alpha\beta}(a_i))}_{i \in L}$.
3. Für alle $\alpha \in M$ und alle $x \in \text{Ind} \mathfrak{F}$ ist $I_{\alpha}^{\overline{\mathfrak{A}}}(x) = \overline{(I_{\alpha}^{\mathfrak{A}^i}(x))}_{i \in L}$.

Es ist leicht zu zeigen, daß $\langle \overline{\mathfrak{A}}, I^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle$ wirklich ein i -PIF-Modell ist.

Nun soll der Hauptsatz über das k -Ultraprodukt angegeben werden. In der allgemeinen Form wie in der klassischen Modelltheorie läßt er sich nicht auf die intuitionistische Modelltheorie übertragen.

Es gilt aber folgender Satz:

Satz 10: Ist $\langle \overline{\mathfrak{A}}, I^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle$ das k -Ultraprodukt von $(\langle \mathfrak{A}^i, I^{\mathfrak{A}^i} \rangle)_{i \in L}$ bezüglich des Filters D und ist der Durchschnitt geeignet vieler Filterelemente ein Element des Filters, wobei die Anzahl jeweils abhängig ist von der Mächtigkeit der Situationsmenge und den Mächtigkeiten der Trägermengen, so gilt für alle Formeln Θ :

$$I_{\alpha}^{\overline{\mathfrak{A}}} \text{ erf } \Theta \Rightarrow \{ l : I_{\alpha}^{\mathfrak{A}^l} \text{ erf } \Theta \} \in D.$$

§ 3. Übergang von den semantischen zu algebraischen Begriffen

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse des zweiten Kapitels zusammengefaßt werden, nachdem wir von den semantischen Begriffen zu den entsprechenden algebraischen Begriffen übergegangen sind.

Im folgenden seien $\mathfrak{A} = \langle \{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in M\}, \leq, \varphi \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle \{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha \in M\}, \leq, \varphi^* \rangle$ zwei K -Strukturen vom Typ $\tau = ((s_i)_{i \in I}, (\sigma_j)_{j \in J})$.

Definition 1: $\mathfrak{A}$ nennen wir ein i -Modell von Θ oder kurz i - Θ -Modell, wenn gilt:

F.a. α F.a. $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}(\alpha \in M \Rightarrow I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha} \text{ erf } \Theta)$.

In Analogie zu diesem Begriff der intuitionistischen Modelltheorie definieren wir den entsprechenden klassischen Begriff. $\mathfrak{A}_\alpha$ heißt ein Θ -Modell, wenn $I^{\mathfrak{A}_\alpha} \Theta$ erfüllt für alle Interpretationen $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ über $\mathfrak{A}_\alpha$.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung her zwischen den Begriffen „ $\mathfrak{A}$ ist ein i - Θ -Modell“ und „ $I^{\mathfrak{A}}_\alpha$ erf Θ “.

Satz 1: Ist Θ eine geschlossene Formel und ist $I^{\mathfrak{A}}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}$ und ist $\alpha \in M$, so gilt:

$I^{\mathfrak{A}}_\alpha \text{ erf } \Theta \Leftrightarrow \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell.}$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “

Es sei $\alpha \leq \beta$ und es sei $I^{*\mathfrak{A} \upharpoonright \beta}$ eine Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \beta$. Es ist $I^{*\mathfrak{A} \upharpoonright \beta} = I^{*\mathfrak{A} \upharpoonright \beta}[\Theta]$. Da $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \beta} \Theta$ erfüllt, erfüllt nach Satz 2, § 2, Kap. 1 $I^{*\mathfrak{A} \upharpoonright \beta} \Theta$. $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ist also ein i - Θ -Modell.

„ $\Leftarrow$ “ folgt unmittelbar aus Definition 1.

Aus Satz 1 folgt:

Satz 2: Ist Θ eine geschlossene Formel und ist $\mathfrak{A}$ ein i - Θ -Modell, so ist auch $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ein i - Θ -Modell.

Beweis:

Ist $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}$ eine Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$, so erfüllt $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha} \Theta$ nach Voraussetzung. Nach Satz 1 ist $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ein i - Θ -Modell.

Die folgenden Sätze, in denen einige Ergebnisse von Kapitel 2 auf die K -Strukturen bzw. Strukturen übertragen werden, sind nun alle im Prinzip ebenso zu beweisen wie der folgende Satz 3. Deshalb soll nur der Beweis dieses Satzes angegeben werden.

Satz 3. (Satz 1, § 1): Ist α ein maximales Element von M , so gilt für alle Formeln Θ :

$\mathfrak{A}_\alpha$ ist ein Θ -Modell $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ist ein i - Θ -Modell.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “

Es sei $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ und es sei $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ die von $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}$ induzierte Interpretation über $\mathfrak{A}_\alpha$. Da $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ -Modell ist, erfüllt $I^{\mathfrak{A}_\alpha} \Theta$. Nach Satz 1, § 1 erfüllt $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha} \Theta$. Da α ein maximales Element von M ist und da $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}$ beliebig gewählt ist, gilt:

F.a. β F.a. $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \beta}(\alpha \leq \beta \Rightarrow I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \beta} \text{ erf } \Theta)$. $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ist also ein i - Θ -Modell.

„ $\Leftarrow$ “

Es sei $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A}_\alpha$ und es sei $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}$ die von $I^{\mathfrak{A}_\alpha}$ induzierte Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$. Da $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha} \Theta$ erfüllt, erfüllt nach Satz 1 § 1 $I^{\mathfrak{A}_\alpha} \Theta$, es ist also $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ -Modell.

Satz 4 (Satz 2, § 1): Ist $\mathfrak{A}$ ein $i\text{-}\Theta$ -Modell und ist M endlich, so gibt es ein $\alpha \in M$, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ -Modell ist.

Satz 5 (Satz 5, § 1): Ist $\mathfrak{A}$ ein $i\text{-}N(\Theta)$ -Modell, so ist $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ -Modell für alle $\alpha \in M$.

Satz 6 (Satz 7, § 1): Enthält die Formel $N(\Theta)$ keinen Existenzquantor und kein Disjunktionszeichen, so gilt:

F.a. $\alpha (\alpha \in M \Rightarrow \mathfrak{A}_\alpha \text{ ist ein } \Theta\text{-Modell}) \Rightarrow \mathfrak{A} \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}$.

Zum folgenden Satz soll wieder ein Beweis angegeben werden.

Satz 7 (Satz 8, § 1): Enthält $N(\Theta)$ keinen Allquantor und kein Negationszeichen und ist Θ eine geschlossene Formel, so gilt:

$\mathfrak{A}_\alpha \text{ ist ein } \Theta\text{-Modell} \Rightarrow \mathfrak{A} \upharpoonright \alpha \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}$.

Beweis:

Es sei $\alpha \leq \beta$ und es sei $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \beta}$ eine beliebige Interpretation über $\mathfrak{A} \upharpoonright \beta$. Da $\mathfrak{A}_\alpha$ ein Θ -Modell ist, ist auch $\mathfrak{A}_\beta$ ein Θ -Modell. Denn Θ ist in der klassischen Modelltheorie invariant gegenüber Homomorphismen und auch invariant gegenüber Oberstrukturen, und $\mathfrak{A}_\beta$ ist Oberstruktur eines homomorphen Bildes von $\mathfrak{A}_\alpha$. $I^{\mathfrak{A}_\beta}$ sei die von $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \beta}$ induzierte Interpretation. Da $I^{\mathfrak{A}_\beta} \Theta$ erfüllt, erfüllt nach Satz 8, § 1 $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \beta} \Theta$. $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ist also ein $i\text{-}\Theta$ -Modell.

Nun gehen wir von den semantischen Begriffen des k -Homomorphismus und der k -Unterstruktur über zu den algebraischen Begriffen des K -Homomorphismus und der K -Unterstruktur.

Definition 2: Die Funktion ψ heißt ein K -Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, wir schreiben: $\psi: \mathfrak{A} \xrightarrow{K} \mathfrak{B}$, wenn gilt (siehe Def. 1, § 2):

1. ψ ordnet jedem $\alpha \in M$ einen Homomorphismus $\psi^\alpha: \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha$ zu.

2. Sind $\alpha, \beta \in M$, so ist $\psi^\alpha \circ \psi^\beta(a) = \psi^\beta \circ \psi^\alpha(a)$ für alle $a \in |\mathfrak{A}_\alpha|$.

$\psi: \mathfrak{A} \xrightarrow{K} \mathfrak{B}$ heißt ein K -Epimorphismus (K -Isomorphismus), wenn $\psi^\alpha: \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha$ ein Epimorphismus (Isomorphismus) ist für alle $\alpha \in M$. Gibt es einen K -Epimorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}$ K -homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{B}$ K -homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{B} \upharpoonright \alpha$ K -homomorphes Bild von $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ für alle $\alpha \in M$.

Ist M einelementig, so ist der Begriff des K -Homomorphismus mit dem klassischen Homomorphiebegriff identisch.

Satz 8 (Satz 5, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ K -homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$ und enthält die Normalform $N(\Theta)$ von Θ kein Negationszeichen, so gilt:

$\mathfrak{A}$ ist ein $i\text{-}\Theta$ -Modell $\Rightarrow \mathfrak{B}$ ist ein $i\text{-}\Theta$ -Modell.

Satz 9 (Satz 6, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ K -homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$ und steht vor jeder Primformel in $N(\Theta)$ ein Negationszeichen, so gilt:

$\mathfrak{B}$ ist ein $i\text{-}\Theta$ -Modell $\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist ein $i\text{-}\Theta$ -Modell.

Satz 10 (Satz 7, § 2): Gibt es einen K -Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt:

$\mathfrak{A}$ ist ein $i\text{-}\Theta$ -Modell $\Leftrightarrow \mathfrak{B}$ ist ein $i\text{-}\Theta$ -Modell.

Die Beweise dieser Sätze sind im Prinzip so zu führen wie der Beweis von Satz 1.

Definition 3: $\mathfrak{B}$ heißt eine K -Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, wenn gilt:

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\mathfrak{B}_\alpha$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}_\alpha$.
2. Für alle $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha \leq \beta$ ist $\varphi^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta} \upharpoonright |\mathfrak{B}_\alpha|$ (siehe Def. 4, § 2).
Ist $\mathfrak{B}$ K -Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B} \upharpoonright \alpha$ K -Unterstruktur von $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$.

Ist M einelementig, so ist der Begriff der K -Unterstruktur mit dem klassischen Unterstrukturbegriff identisch.

Auch der folgende Satz läßt sich im Prinzip so beweisen wie Satz 1.

Satz 11 (Satz 8, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ eine K -Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ und enthält die Normalform von Θ keinen Existenzquantor, so gilt:

$\mathfrak{A}$ ist ein i - Θ -Modell $\Rightarrow \mathfrak{B}$ ist ein i - Θ -Modell.

Satz 12 (Satz 9, § 2): Ist $\mathfrak{B}$ eine K -Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ und enthält die Normalform der geschlossenen Formel Θ keinen Allquantor, so gilt:

$\mathfrak{B}$ ist ein i - Θ -Modell $\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist ein i - Θ -Modell.

Beweis:

Es sei $\alpha \in M$ und $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}$ eine Interpretation mit $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}_\alpha(x) \in |\mathfrak{B}|$ für alle $x \in \text{Ind } \mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{B}$ ein i - Θ -Modell ist, erfüllt nach Satz 8 § 2 $I^{\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha}_\alpha \Theta$. Nach Satz 1 ist $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha$ ein i - Θ -Modell. Das gilt für alle $\alpha \in M$. Deshalb ist $\mathfrak{A}$ ein i - Θ -Modell.

Auch der Invarianzbegriff und die Sätze 1 bis 4 in § 2 lassen sich geeignet übertragen.

Zum Abschluß wenden wir uns noch dem Begriff des K -Ultraprodukts zu.

Definition 4: Ist $(\mathfrak{A}^i)_{i \in L}$ eine L -Folge von K -Strukturen mit $\mathfrak{A}^i = \langle \{\mathfrak{A}^i_\alpha : \alpha \in M\}, \leq, \varphi_i \rangle$, so heißt die K -Struktur $\overline{\mathfrak{A}} = \langle \{\overline{\mathfrak{A}}_\alpha : \alpha \in M\}, \leq, \overline{\varphi} \rangle$ das K -Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}^i)_{i \in L}$ bezüglich des Ultrafilters D , wenn gilt (siehe Def. 5, § 2):

1. Für alle $\alpha \in M$ ist $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ das Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}^i)_{i \in L}$ bezüglich D .
2. Sind $\alpha, \beta \in M$ und ist $\overline{(a_i)_{i \in L}} \in |\overline{\mathfrak{A}}_\alpha|$, so ist $\overline{\varphi}^{\alpha\beta}(a_i)_{i \in L} = \overline{(\varphi^{\alpha\beta}_i(a_i))_{i \in L}}$.

Es gilt folgender Satz über K -Ultraprodukte, wie man mit Hilfe von Satz 10, § 2 zeigen kann.

Satz 13: Es sei $\overline{\mathfrak{A}}$ das K -Ultraprodukt von $(\mathfrak{A}^i)_{i \in L}$ bezüglich des Ultrafilters D . Hat D die Eigenschaft, daß der Durchschnitt geeignet vieler Filterelemente ein Element des Filters ist, so gilt für alle Formeln Θ .

$\overline{\mathfrak{A}}$ ist ein i - Θ -Modell $\Leftrightarrow \{i : \mathfrak{A}^i \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} \in D$.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “

Es sei $\alpha \in M$ und es sei $(I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha})_{i \in L}$ eine L -Folge von Interpretationen. $I^{\overline{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha}$ sei die Interpretation mit

$I^{\overline{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha}_\alpha(x) = \overline{(I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha}_\alpha(x))_{i \in L}}$ für alle $x \in \text{Ind } \mathfrak{F}$.

$\Rightarrow \langle \overline{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha, I^{\overline{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha} \rangle$ ist das k -Ultraprodukt von $(\langle \mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha, I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha} \rangle)_{i \in L}$.

Da $I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha}_\alpha \Theta$ erfüllt, ist $D^0(\alpha, (I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha})_{i \in L}) = \{i : I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha}_\alpha \text{ erf } \Theta\} \in D$ nach Satz 10 § 2. Jedem $\alpha \in M$ und jeder L -Folge von Interpretationen $(I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha})_{i \in L}$ ordnen wir ein Filterelement $D^0(\alpha, (I^{\mathfrak{A}^i \upharpoonright \alpha})_{i \in L})$ zu. Es sei D^0 der Durchschnitt aller so erhaltenen

Filterelemente. Es ist

$$D^0 \subseteq \{l : \mathfrak{A}^l \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} = D^1.$$

$$\Rightarrow D^1 \in D.$$

$$\Rightarrow \{l : \mathfrak{A}^l \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} \in D.$$

„ $\Leftarrow$ “

Es sei $\alpha \in M$ und es sei $I^{\bar{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha}$ eine Interpretation über $\bar{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha$. Es sei $(I^{\mathfrak{A}^l \upharpoonright \alpha})_{l \in L}$ eine L -Folge von Interpretationen mit $\overline{(I^{\mathfrak{A}^l \upharpoonright \alpha}(x))_{l \in L}} = I^{\bar{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha}(x)$ für alle $x \in \text{Ind } \mathfrak{F}$. Es ist $\{l : \mathfrak{A}^l \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell}\} \subseteq \{l : I^{\mathfrak{A}^l \upharpoonright \alpha} \text{ erf } \Theta\} = D^0$.

$$\Rightarrow D^0 \in D. \text{ Nach Satz 10, § 2 gilt:}$$

$$I^{\bar{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha} \text{ erf } \Theta. \text{ Das gilt für alle } \alpha \in M \text{ und alle } I^{\bar{\mathfrak{A}} \upharpoonright \alpha}.$$

$$\Rightarrow \bar{\mathfrak{A}} \text{ ist ein } i\text{-}\Theta\text{-Modell.}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. H. G. ACZEL: Saturated intuitionistic theories. Contributions to the Mathematical Logic. Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover 1966. Eds. H. A. SCHMIDT, K. SCHÜTTE and H.-J. THIELE, North-Holland Publishing Company. Amsterdam 1968.
- [2] T. E. FRAYNE, A. C. MOREL, D. S. SCOTT: Reduced direct products. Fund. Math. vol. 51 1962.
- [3] H. HERMES: Einführung in die mathematische Logik. Teubner Verlag Stuttgart 1963.
- [4] A. HEYTING: Intuitionism. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1956.
- [5] S. C. KLEENE: Introduction to Metamathematics. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1952.
- [6] G. KREISEL, J. L. KRIVINE: Eléments de logique mathématique. Monographies de la Société Mathématique de France. Paris 1967.
- [7] S. A. KRIPKE: Semantical analysis of intuitionistic logic. Formal Systems and Recursive Functions, eds. J. N. CROSSLEY and M. A. E. DUMMET. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1965.
- [8] R. G. LYNDON: Properties preserved under homomorphism. Pacific Journal Math. vol 9 1959.
- [9] K. SCHÜTTE: Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 42. Springer Verlag 1968.

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

Lebenslauf

Am 10. Mai 1941 wurde ich als Sohn des Stadtoberamtmanns RUDOLF OSSWALD und seiner Ehefrau LUISE OSSWALD, geb. BEHRENS, in Hannover geboren.

Die Schulzeit über war ich in Hannover. Im Jahre 1961 bestand ich das Abitur am Ratsgymnasium, einem altsprachlichen Gymnasium.

Danach studierte ich Mathematik, Philosophie und Sport zuerst an der Technischen Hochschule Hannover, später an der Universität Freiburg und dann wieder in Hannover, wo ich 1967 das Staatsexamen für das Höhere Lehramt ablegte.

Seit diesem Jahr studiere ich an der Universität München und bin am Mathematischen Institut Mitarbeiter bei Prof. Dr. K. SCHÜTTE.

HORST OSSWALD

Introduction

The first part of the book is devoted to a general discussion of the principles of the theory of the structure of the atom.

The second part of the book is devoted to a detailed discussion of the theory of the structure of the atom.

The third part of the book is devoted to a detailed discussion of the theory of the structure of the atom.

The fourth part of the book is devoted to a detailed discussion of the theory of the structure of the atom.

Page 100

